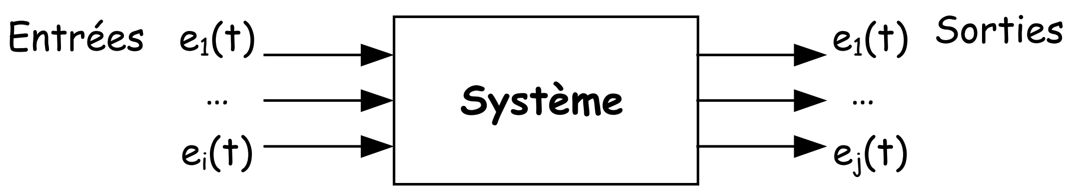
MODELISATION DES SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS (SLCI)

I – Introduction

Dans le cas général un système peut posséder plusieurs entrées (causes) et plusieurs sorties (effets). Il est représenté par un bloc contenant le nom du système. On étudie dans cette partie essentiellement les systèmes qui possèdent une entrée et une sortie, et les systèmes à deux variables d'entrée (entrée de consigne et entrée de perturbation) pour une sortie.



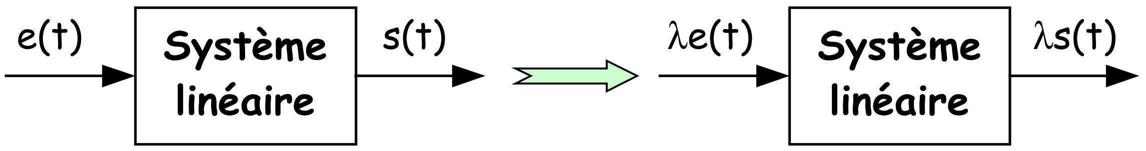
II – Définition d'un système linéaire continu et invariant

Afin de pouvoir étudier et améliorer les performances d'un système asservi il faut pouvoir établir un **modèle**, à partir duquel nous pourrons réaliser des simulations. Pour cela il est impératif de connaître la validité de ce modèle.

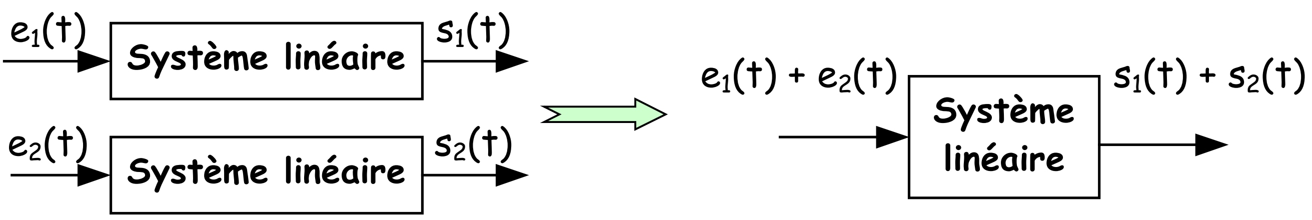
1. Linéarité

Système linéaire : Un système est dit linéaire si la fonction qui décrit son comportement est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors les principes de proportionnalité et de superposition :

Principe de proportionnalité : si $s(t)$ est la réponse à l'entrée $e(t)$ alors $\lambda \times s(t)$ est la réponse à l'entrée $\lambda \times e(t)$.

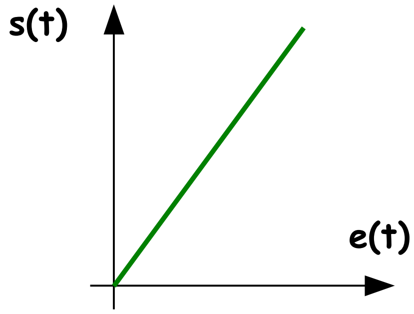


Principe de superposition : si $s_1(t)$ est la réponse à l'entrée $e_1(t)$ et $s_2(t)$ est la réponse à l'entrée $e_2(t)$ alors $[s_1(t) + s_2(t)]$ est la réponse à l'entrée $[e_1(t) + e_2(t)]$.

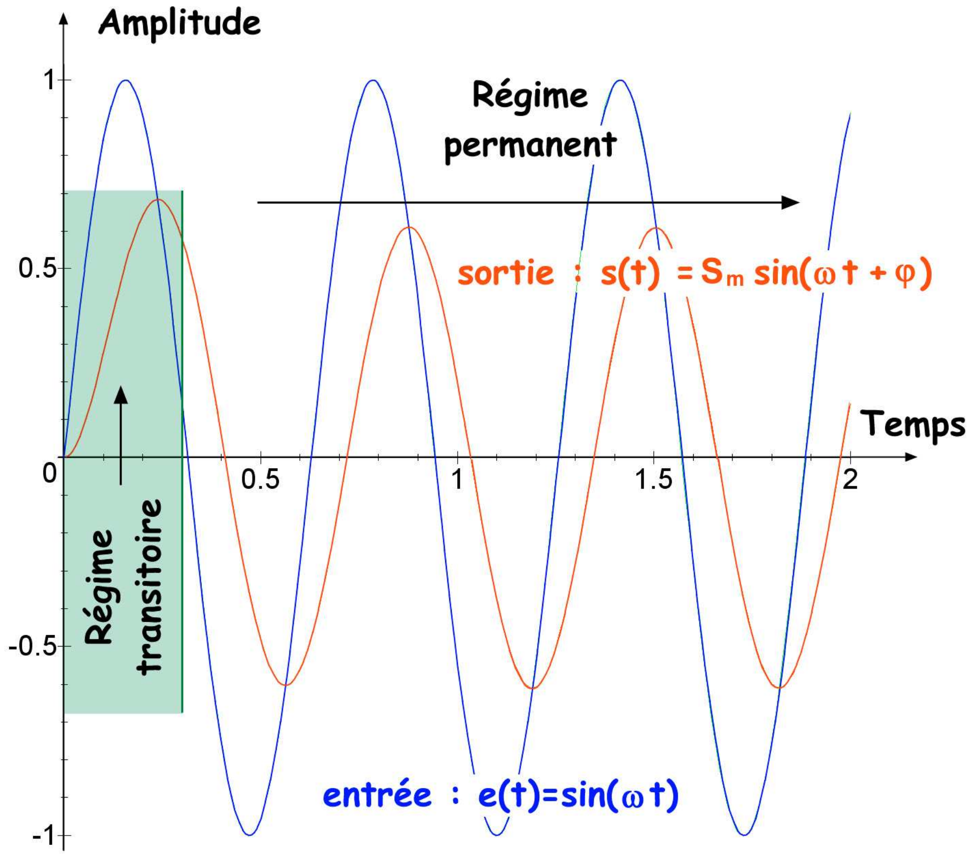


Remarques :

Relation entrée/sortie : pour un système linéaire, en **régime établi**, la courbe représentative $s = f(e)$ est une droite. Attention : ne pas confondre avec la réponse d'un système en fonction du temps $s(t)$.



Nature de la sortie : pour un système linéaire la réponse en régime établi est de même nature que l'entrée. La figure suivante montre la réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale. On peut constater qu'au-delà du régime transitoire la réponse est une sinusoïde d'amplitude différente et en retard par rapport à l'entrée.



Equations différentielles : les systèmes asservis sont des systèmes commandés, électromécaniques régis par les lois de la Physique (dynamique, hydraulique, électricité…). Un système linéaire sera régi par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

$$a_0 + a_1 y^{(1)} + \ldots + a_n y^{(n)} = b_0 + b_1 x^{(1)} + \ldots + b_n x^{(n)}$$

Remarque : $y^{(n)} = \dfrac{d^n(y(t))}{dt^n}$

2. Non-Linéarité

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires. En effet de nombreuses situations conduisent à la non-linéarité :

- Loi entrée-sortie de chaîne cinématique non linéaire ;
- Phénomène de saturation (Butée mécanique, amplificateur…) ;
- Phénomène de seuil (frottement…)
- Hystérésis (jeu dans un mécanisme, matériaux élastomère, cycle magnétique…).

Tous ces phénomènes pourront être rencontrés lors des applications (TD, TP…). Dans une situation de non-linéarité il sera possible d'étudier le comportement du système sur une plage réduite par rapport au domaine d'utilisation, en **linéarisant** autour de la position étudiée. Un modèle de système linéaire pourra ainsi être utilisé.

3. Système continu et invariant

Un système est **continu**, par opposition à un système discret, lorsque les variations des grandeurs physiques sont définies à chaque instant (ils sont caractérisés par des fonctions continues). On parle aussi dans ce cas de système analogique.

La plupart des systèmes physiques, d'un point de vue macroscopique, sont continus. Dans les systèmes de commande modernes, l'information est traitée numériquement ce qui nécessite un **échantillonnage** des signaux. On parle dans ce cas de systèmes échantillonnés ou discrets. Si l'échantillonnage est très rapide (période d'échantillonnage très petite), on peut traiter le système par un modèle continu.

→ *Voir Ch.I - § II.1.*

Un système est dit **invariant** si on suppose que les caractéristiques du système (masse, dimensions, résistance, impédance, ...) ne varient pas au cours du temps ("le système ne vieillit pas").

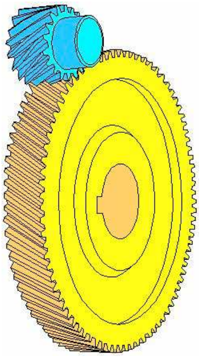
III – Equations caractéristiques des systèmes simples

1. Relation de proportionnalité

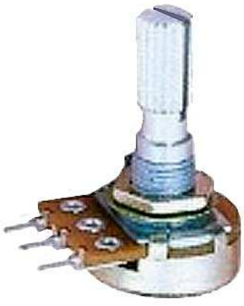
Pour beaucoup de systèmes simples la sortie s(t) s'exprime comme une grandeur proportionnelle de l'entrée e(t), et ce quel que soit t.

Exemples :

ressort



engrenage



potentiomètre

2. Système du premier ordre

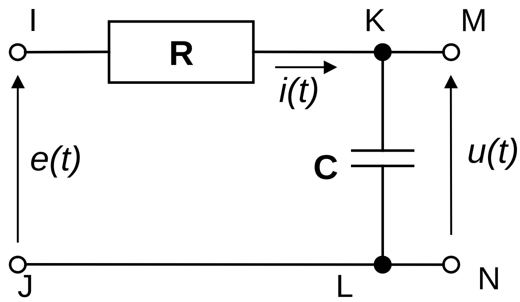
L'équation temporelle qui régit un système du premier ordre simple est une **équation différentielle linéaire du premier ordre** (à coefficients constants), elle s'écrit :

$$\boxed{\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\, e(t)}$$

Avec τ, **constante de temps** (> 0) en secondes, et **K gain statique** du système

Remarque : pour un premier ordre généralisé, l'équation devient : $s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt} = k\,[\,e(t) + \tau' \frac{de(t)}{dt}\,]$

Exemples : circuit RC



On considère le condensateur déchargé à l'instant t = 0 et on note e(t) et s(t), les tensions respectives d'entrée et de sortie.

Mise en équation : on utilise les lois de Kirchoff[1]

Maille IMNJ : $e(t) = R\, i(t) + u(t)$

Maille KLMN : $i(t) = C \frac{d[s(t)]}{dt}$ $\Rightarrow$ $RC \frac{d[s(t)]}{dt} + s(t) = e(t)$

Le circuit RC proposé est donc d'un système du premier ordre, de constante de temps τ = RC et de gain statique **K = 1**.

3. Système du deuxième ordre

L'équation temporelle qui régit un système du deuxième ordre simple est une **équation différentielle linéaire du deuxième ordre** (à coefficients constants), dans le cas général elle s'écrit :

$$s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2s(t)}{dt^2} = Ke(t)$$

Mais pour des raisons que nous verrons plus loin (solution du polynôme caractéristique) une autre forme est donnée à cette équation, forme qui fait intervenir deux grandeurs caractéristiques du système, ξ **coefficient d'amortissement** et ω_0 **pulsation propre des oscillations non amorties** du système. **K** est toujours le gain statique du système.

$$\boxed{\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2\, s(t) = K\, \omega_0^2\, e(t)}$$

ξ : *sans unité* ω_0 : *rad.s*$^{-1}$

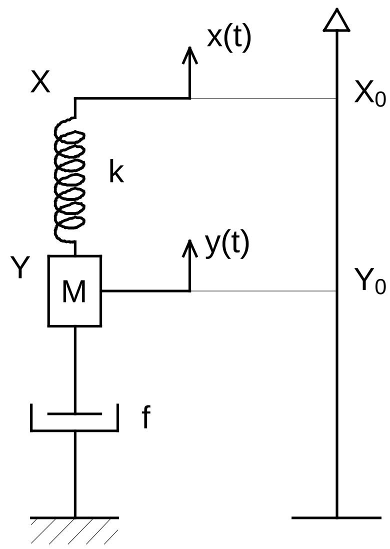
[1] Kirchoff Gustave Robert (1824 - 1887) : Physicien allemand, lois d'électricité, signal télégraphique, analyse spectrale.

Remarques :

A partir de la première forme de l'équation différentielle il suffit d'identifier les coefficients pour déterminer ξ et ω_0.

ω_0 est la pulsation des oscillations non amorties du système, pulsation qui correspond à $\xi = 0$.
ξ (lire "ksi") parfois z, ou encore m).

Exemples : système [masse – ressort – amortisseur]



On considère :

Un solide M, de masse **m**.

Un ressort de raideur **k**.
Un amortisseur de coefficient de frottement visqueux **f**.

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + f\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = kx(t)$$

Il reste à identifier les caractéristiques de ce système :

ξ = ... ω_0 = ...

4. Système plus complexe : nécessité d'un outil mathématique adapté

Nous avons vu qu'un système global est constitué de plusieurs composants. Le diagramme fonctionnel du système global conduit à combiner les différentes équations de chaque composant et on aboutit alors à une nouvelle équation différentielle d'ordre supérieur mettant en jeu l'entrée et la sortie du système.

D'une manière générale, un système linéaire continu invariant peut être modélisé par une équation différentielle d'ordre **n** qui s'écrit sous la forme :

$$a_n\frac{d^ns(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}s(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{ds(t)}{dt} + a_0s(t) = b_m\frac{d^me(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}e(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1\frac{de(t)}{dt} + b_0e(t)$$

Pour poursuivre l'analyse des SLCI, et définir une modélisation performante du système global, deux remarques sont nécessaires :

- On veut obtenir la **réponse** du système pour une **entrée quelconque** afin d'analyser les performances globales du système ;

- On doit pouvoir prendre en compte dans le modèle global la **modification de modélisation** d'un composant. En effet :

$\rightarrow$ La modélisation d'un composant d'un système global n'est pas unique. Un moteur à courant continu pourra par exemple être modélisé par un premier ordre, un deuxième ordre, voire par un troisième ordre (pour obtenir la position angulaire en sortie).

→ Le correcteur est un composant qui par définition est appelé à évoluer au cours de l'étude.

On constate que dans ces deux situations l'écriture sous forme différentielle du SLCI n'est pas adaptée.

Ainsi, l'outil privilégié pour traiter un SLCI de manière efficace, tant pour analyser le comportement, que pour résoudre une équation d'ordre quelconque, est la **transformation de Laplace**[2] qui permet d'obtenir une relation algébrique entre la sortie et l'entrée. Cet outil est présenté dans le chapitre suivant.

Par cet outil nous allons ainsi réalisé un changement d'espace, du domaine temporel, vers le domaine laplacien.

{ Espace temporel } ⟷ **{ Espace laplacien }**

[2] Laplace Pierre - Marquis de (1749 - 1827) : astronome, mathématicien, physicien Français.